L. 09 avril 1938 Sfax	Mathématiques	mercredi: 27-05-2009
$2^{ème}$ année : Sciences	Devoir de synthèse n° 3	Durée : 2^h

Exercice 1 : (9 points)

On donne $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 2$ et $g(x) = 1 - \frac{3}{x-3}$

1. Monter que $f(x) = -\frac{1}{2}(x-2)^2 + 4$ puis construire dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ la parabole $\mathcal{C}_f$ (indiquer son sommet S et son axe de symétrie Δ)
2.
   a) Construire dans le même repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ l'hyperbole $\mathcal{C}_g$ (indiquer son centre I et ses asymptotes $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$)
   b) Donner graphiquement le nombre de solutions de l'équation $f(x) = g(x)$
3. Vérifier par le calcul que les points $A(0,2); S(2,4)$ et $B(5,-\frac{1}{2})$ sont les points d'intersection de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$
4. On donne $\mathcal{D} : y = x + 2$
   a) Déterminer graphiquement $\mathcal{C}_f \cap \mathcal{D}$
   b) Résoudre graphiquement :
   $$-\frac{1}{2}(x-2)^2 - x \leq -2 \quad \text{puis} \quad \frac{x-6}{x-3} - 2 \geq x$$
5. L'hyperbole $\mathcal{C}_g$ coupe la droite des abscisses *(Ox)* en $\mathcal{C}$.
   a) Calculer les coordonnées de $\mathcal{C}$ puis résoudre graphiquement $g(x) \leq 0$
   b) On pose $h(x) = \left|\frac{x-6}{x-3}\right|$. Tracer la courbe $\mathcal{C}_h$ à partir de $\mathcal{C}_g$

Exercice 2 : (7 points)

Dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ on donne $I(2,1)$ et on désigne par $\mathscr{C}$ le cercle de centre I et de rayon $R = \sqrt{13}$.

1. Écrire une équation de $\mathscr{C}$.
2. Vérifier que les points $A(-1,-1); B(-1,3)$ et $C(4,4)$ sont des points de $\mathscr{C}$.
3. Calculer les distances AB; AC et BC puis calculer s l'aire de ABC.
4. On donne $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\Delta_\alpha : 3x - 2y + \alpha = 0$
   a) Déterminer la valeur de α pour que Δ_α passe par I puis vérifier que pour cette valeur $C \in \Delta_\alpha$
   b) Déterminer les valeurs de α pour que Δ_α et $\mathscr{C}$ soient tangents.

Exercice 3 : (4 points)

Dans un plan *(P)*, on considère un triangle ABC équilatéral de côté a et inscrit dans un cercle $(\mathscr{C})$ de centre O. On pose $I = B * C$.
Δ est la droite perpendiculaire à (P) en A et $S \in \Delta$ avec $S \neq A$.

1. Faites un dessin et montrer que le plan (SAI) est le plan médiateur de [BC].
2. Montrer que les plans (SBC) et (SAI) sont perpendiculaires.
3. Soit J le point de [SI] tel que $IJ = \frac{1}{3}IS$
   a) Montrer que (OJ) et (AS) sont parallèles
   b) En déduire que (OJ) est l'axe du cercle $(\mathscr{C})$
4. On suppose que $AS = a$.
   Calculer à l'aide de a les distances OJ; AJ et SJ